De la résolution du triangle sphérique de position par l'analemme à différents cadrans de hauteurs

par Yvon Massé

L'objet de ce premier article est de présenter et mettre en place des figures géométriques à partir d'une méthode antique: l'analemme. Ces figures permettront, dans les articles suivants, de comprendre le principe de fonctionnement d'anciens instruments qui donnent l'heure vraie ou l'azimut du soleil en mesurant sa hauteur au-dessus de l'horizon.

De façon générale, pour définir la direction d'un astre, et plus particulièrement pour ce qui nous intéresse celle du soleil, il faut définir un référentiel. Il s'établit logiquement pour une utilisation locale (dans une région de quelques kilomètres de rayon) par les deux directions suivantes:

- La verticale du lieu direction ascendante, c'est-à-dire le zénith.
- L'axe de rotation de la terre direction nord: le pôle nord céleste.

Le plan contenant ces deux directions est appelé méridien, sa trace sur le plan de l'horizon donne une droite orientée nord-sud appelée ligne méridienne.

Le zénith et le pôle nord donnent respectivement sur la sphère céleste les deux points Z et P (*Fig. 1*). A ceux-ci nous ajouterons le point S correspondant à la direction du soleil. On forme ainsi le triangle sphérique de position PZS. Celui-ci est délimité par:

- Le grand cercle (**Note 1**) passant par P et Z ou cercle méridien. Par convention on appelle méridien supérieur le demi-grand cercle PZP' avec P' le pôle sud.
- Le demi-grand cercle PSP' appelé cercle horaire (bien que ce soit un demi-cercle).
- Le vertical du soleil, c'est-à-dire le demi-grand cercle ZSZ' avec Z' correspondant au nadir.

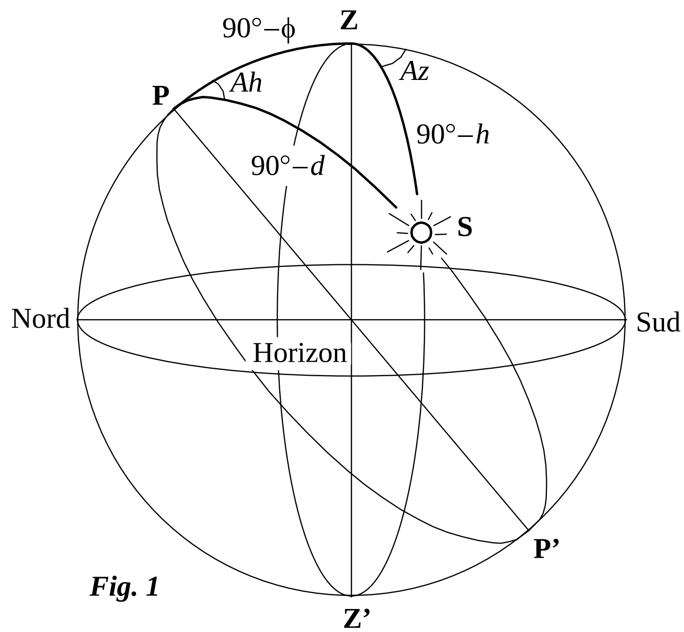

Fig. 1

Pour compléter la définition des termes propres à la sphère céleste citons:

- L'almucantarat ou cercle de hauteur: c'est un petit cercle parallèle à l'horizon qui rassemble tous les points de hauteur identique.
- L'équateur céleste: c'est le grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles.
- Le parallèle céleste: c'est un petit cercle parallèle à l'équateur céleste qui contient tous les points de même déclinaison.

Des 6 éléments constituant le triangle de position (3 angles et 3 cotés qui se mesurent aussi par des angles car ils correspondent à des portions de grands cercles), 5 seulement sont classiquement utilisés, citons-les rapidement:

- L'angle de l'arc ZS est le complément (c'est-à-dire complément à 90°) de la hauteur *h* du soleil sur l'horizon.

  ZS = 90° - *h*

  Dans les applications de gnomonique le soleil est toujours visible donc *h* varie de 0 à 90° et ZS sera toujours inférieur à 90°.

- L'angle de l'arc PZ est le complément de la hauteur du pôle ou encore de la latitude f du lieu.

  PZ = 90° - ϕ

  ϕ variant de +90° (pôle nord) à -90° (pôle sud), PZ peut varier respectivement de 0 à 180°.

- L'angle de l'arc PS est le complément de la déclinaison du soleil *d*.

  PS = 90° - *d*

  Quand *d* varie de -23,5° (solstice d'hiver) à +23,5° (solstice d'été), PS varie respectivement de 90 + 23,5° (angle obtus) à 90 - 23,5° (angle aigu).

- L'angle SZP est le supplément (complément à 180°) de l'azimut du soleil *Az*.

  SZP = 180° - *Az*

- L'angle SPZ correspond à l'angle horaire du soleil *Ah*. Cet angle converti en heure (1 h = 15°) nous donne l'heure solaire ou heure vraie avant ou après midi.

La position du soleil est définie par tout ou partie du triangle de position ainsi, par exemple, connaissant le méridien on peut situer le soleil par le couple d'angles (*Az*, *h*). Inversement, connaissant la position du soleil, on peut recomposer le triangle de position. La trigonométrie sphérique nous enseigne que sur les 6 éléments d'un triangle, il faut en connaître 3 quelconques, angles ou côtés, pour calculer tous les autres. Classiquement, en gnomonique, on connaît la déclinaison du soleil et la latitude du lieu (ce qui nous donne les côtés PS et PZ) et les instruments étudiés dans cette série d'articles mesurent la hauteur du soleil (soit indirectement le côté ZS), angle qui a l'avantage de pouvoir être relevé sans connaissance préalable du méridien. Nous avons donc assez de données pour retrouver soit l'angle horaire *Ah*, et par suite l'heure vraie, soit l'azimut du soleil *Az*.

Pour résoudre les angles de la sphère, les gnomonistes de l'antiquité ont imaginé l'analemme, (**Note 2**) sorte de géométrie descriptive basée sur la projection orthogonale (ou orthographique) de la sphère céleste sur le méridien. Pour nous familiariser avec cette technique, employons-la dans un premier temps pour trouver l'angle horaire du soleil à partir des 3 angles PZ, PS et ZS.

Plaçons-nous dans le plan du méridien (Fig. 2) et du centre O traçons le cercle méridien (M). Traçons ensuite la verticale OZ et l'axe polaire OP faisant entre eux un angle de 90° - ϕ. Nous savons que le soleil est éloigné du zénith de l'angle 90° - *h* et qu'il se trouve sur un almucantarat perpendiculaire à OZ, donc au plan de la figure. La projection orthogonale de l'almucantarat se réduit alors à un segment ou plus exactement à la corde $S_1S'_1$. Pour l'obtenir, tirons le rayon OS_1 faisant l'angle 90° - *h* avec OZ puis traçons $S_1S'_1$ perpendiculairement à ce dernier.

D'autre part, le soleil est éloigné du pôle de l'angle 90° - *d* et est situé sur un parallèle céleste, lui aussi perpendiculaire au plan de la figure. Sa projection orthogonale donne la corde $S_2S'_2$. On l'obtient en traçant le rayon OS_2 faisant avec OP l'angle 90° - *d* puis en tirant de S_2 la corde $S_2S'_2$ perpendiculairement à OP.

Nous avons ainsi "déplié" le triangle sphérique sur le plan du méridien pour obtenir la portion de cercle S_1ZPS_2. La projection de la position du soleil se trouve au point commun des cordes $S_1S'_1$ et $S_2S'_2$, c'est-à-dire à leur intersection S'.

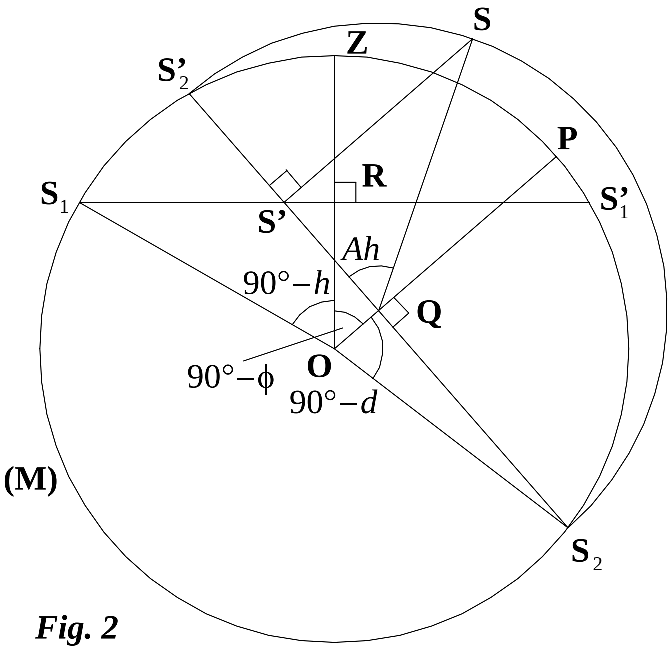

Fig. 2

Pour obtenir l’angle horaire, nous allons maintenant rabattre le parallèle du soleil par rotation autour de sa projection $S_2S'_2$ sur le plan de la figure. Du centre Q, intersection du rayon OP et de la corde $S_2S'_2$, traçons le demi-cercle $S_2SS'_2$ correspondant au parallèle rabattu. Élevons ensuite, perpendiculairement à $S_2S'_2$, la droite S’S pour obtenir la position du soleil S sur son parallèle.

Enfin, des deux points S_2 et S'_2 prenons celui qui est sur le méridien supérieur, c’est-à-dire S'_2. C’est lui qui sera utilisé pour obtenir l’angle horaire *Ah* qui est alors donné par l’angle SQS'_2.

Remarques:

- Cette construction est universelle, pour les latitudes de l’hémisphère sud il suffit de dessiner l’angle ZOP obtus conformément à sa valeur calculée en prenant f négatif.
- Par symétrie d’axe OZ on retrouve l’angle 90° - *h* en ZOS'_1. Ainsi, pour obtenir la corde $S_1S'_1$ on peut aussi tracer les rayons OS_1 et OS'_1 faisant l’angle 90° - *h* de part et d’autre de OZ.
-
- La remarque précédente est aussi valable pour l’axe OP et les points S_2 et S'_2.
- On retrouve directement la hauteur du soleil *h* par l’angle OS_1R ou OS'_1R.
- Par le même principe, les angles OS_2Q et OS'_2Q correspondent à la déclinaison du soleil.
- Pour utiliser cette figure dans le cadre d’un instrument, il faut graduer la corde $S_2S'_2$ en heures. Cette graduation suivra une loi en cos *Ah*. On peut aussi tracer plusieurs cordes $S_2S'_2$ et les paramétrer en déclinaisons.
- En décomposant le segment OR en OQ’ et Q’R, avec Q’ projection de Q sur OZ perpendiculairement à ce rayon, les lecteurs qui préfèrent utiliser les relations trigonométriques retrouveront sans peine la formule:

$$\sin h = \sin \phi . \sin d + \cos \phi . \cos d . \cos Ah$$

- Des remarques similaires pourront être déduites des figures suivantes.

De la figure précédente on peut obtenir l’azimut *Az* après avoir trouvé S’ en rabattant non pas le parallèle du soleil mais son almucantarat (Fig. 3). Pour cela, du centre R, intersection de $S_1S'_1$ avec OZ, traçons le demi-cercle $S_1SS'_1$ et de S’ tirons perpendiculairement à $S_1S'_1$ la droite S’S pour obtenir le point S correspondant à la position du soleil sur son almucantarat. Des deux points S_1 et S'_1 prenons celui qui est sur le méridien supérieur, c’est-à-dire S_1, pour former l’angle SRS_1 qui est l’angle *Az* cherché.

En prenant R’ projection de R perpendiculairement à OP sur OP et en remarquant que:

$$OQ = OR' - R'Q$$

On obtient la relation:

$$\sin d = \sin \phi . \sin h - \cos \phi . \cos h . \cos Az$$

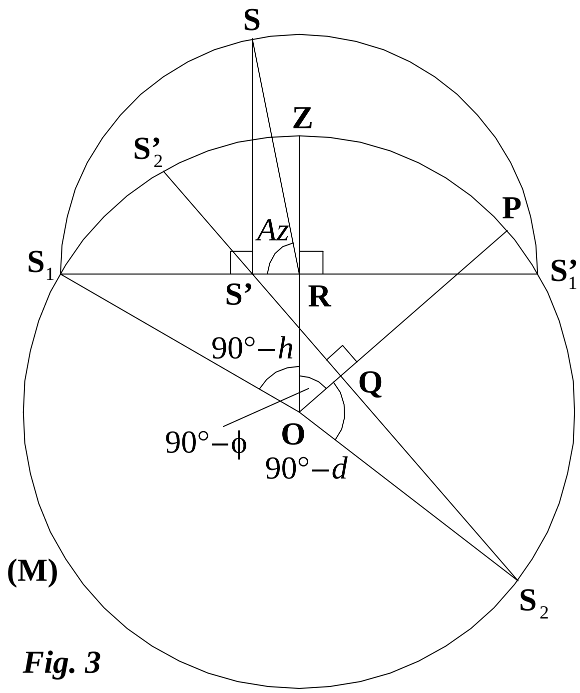

Fig. 3

Le méridien, plan de projection de l'analemme, a le double avantage d'être fixe pour l'observateur et d'être la référence commune à la mesure de l'angle horaire et de l'azimut. La conséquence de ce dernier point est de donner des figures similaires pour la résolution de *Ah* et *Az*. Cependant rien n'impose, dans la technique propre à l'analemme, d'utiliser particulièrement le méridien comme plan de projection. En effet, par le simple principe de symétrie, on peut parfaitement imaginer de résoudre un angle délimité par deux plans en utilisant la projection sur l'un ou l'autre de ces deux plans. Ainsi, pour obtenir l'angle horaire *Ah*, on peut aussi utiliser la projection sur le plan du cercle horaire et, de la même façon, utiliser le plan du vertical du soleil pour trouver son azimut.

Illustrons ces possibilités en dépliant, dans un premier temps, le triangle sphérique sur le plan du cercle horaire pour trouver l'angle horaire *Ah*. Contrairement au tracé précédent, ce n'est pas le soleil que nous allons rechercher - il est dans le plan de la figure - mais le zénith.

De O, traçons le cercle (H) correspondant à la trace de la sphère céleste puis le rayon OP, P représentant le pôle nord (Fig. 4). Traçons le rayons OS faisant avec OP l'angle 90° - *d* pour obtenir la position du soleil S. Le zénith étant éloigné de l'angle 90° - ϕ du pôle nord, il se trouve donc sur un parallèle céleste perpendiculaire au plan de notre figure. La projection de ce parallèle sur le plan du cercle horaire donne la corde $Z_1Z'_1$ que l'on obtient en traçant le rayon OZ_1 faisant avec OP l'angle 90° - ϕ puis en tirant la corde $Z_1Z'_1$ perpendiculairement à OP. En faisant le même raisonnement avec la distance angulaire du soleil au zénith on est conduit à tracer le rayon OZ_2 faisant avec OS l'angle 90° - *h* et d'abaisser de Z_2 la perpendiculaire à OS pour obtenir la corde $Z_2Z'_2$. La projection du zénith se situe sur celle-ci et comme elle doit aussi se trouver sur la corde $Z_1Z'_1$, c'est à l'intersection Z' des deux cordes qu'elle se trouve.

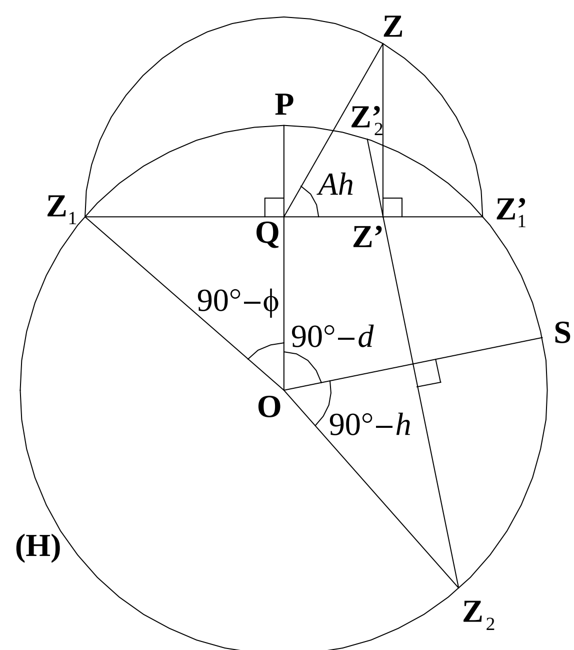

Fig. 4

Rabattons maintenant le parallèle contenant le zénith sur le plan de la figure en traçant du centre Q, intersection de OP et $Z_1Z'_1$, le demi-cercle $Z_1ZZ'_1$. De Z', tirons la perpendiculaire à $Z_1Z'_1$ qui coupe le demi-cercle au point Z correspondant au zénith. Le rayon QZ correspond donc à la trace du méridien sur le plan du parallèle $Z_1ZZ'_1$. Des points Z_1 et Z'_1 prenons celui qui se trouve sur le cercle horaire, soit Z'_1, pour constituer l'angle ZQZ'_1 qui est l'angle horaire *Ah* cherché.

Enfin, pour épuiser toutes les configurations, terminons avec la projection sur le plan du vertical du soleil afin d'obtenir l'azimut *Az* en recherchant la position du pôle nord (Fig. 5).

Du centre O dessinons le cercle (V) correspondant à la trace de la sphère céleste et tirons les deux rayon OZ et OS faisant entre eux l'angle 90° - *h*. La projection de l'almucantarat contenant le pôle nord donne la corde $P_1P'_1$ qu'on obtient en traçant le rayon OP_1 faisant l'angle 90° - ϕ avec OZ et en tirant $P_1P'_1$ perpendiculairement à OZ. Le pôle nord, distant du soleil S de l'angle 90° - *d*, est situé sur un petit cercle perpendiculaire au plan de la figure. Pour obtenir la corde $P_2P'_2$ de sa projection il faut tracer le rayon OP_2 faisant avec OS un angle de 90° - *d* puis de P_2 abaisser la perpendiculaire à OS. La projection P' du pôle nord se trouve au point d'intersection de $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$.

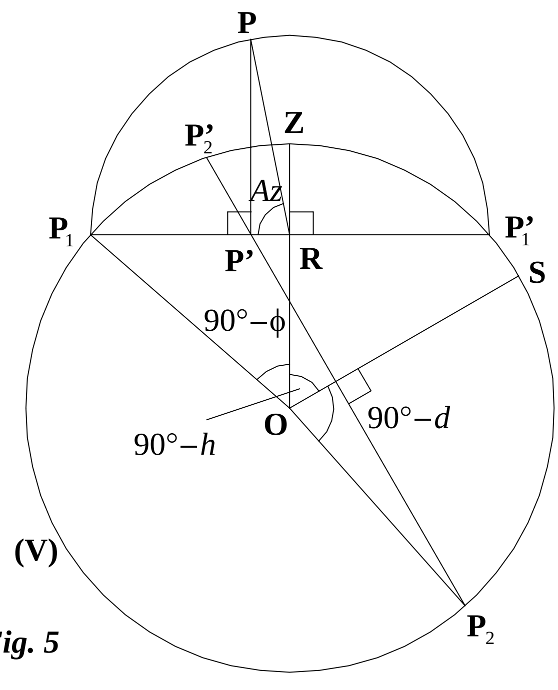

Fig. 5

Du centre R, traçons le demi-cercle $P_1PP'_1$ correspondant au rabattement de l'almucantarat du pôle et de P' tirons la perpendiculaire à $P_1P'_1$ pour obtenir le point P. Des deux points P_1 et P'_1 prenons celui qui n'est pas situé sur le vertical du soleil, soit P_1. Utilisons-le pour former l'angle P_1RP qui correspond à l'angle *Az* cherché.

Nous terminerons ici cette partie théorique qui a pu paraître longue et fastidieuse à certains lecteurs mais, d'une part, il m'a paru nécessaire de reprendre les notions de base pour que l'ensemble soit accessible à tous et, d'autre part, les détails de chaque figure nous seront d'un précieux secours quand nous les "revisiterons". En effet, dans les articles qui suivront, nous retrouverons les figures 2, 4 et 5 que nous comparerons à des gravures anciennes d'instruments de hauteur - avec, le cas échéant, quelques éléments historiques relatifs à ceux-ci. Ces comparaisons nous permettront de comprendre la structure et le principe de fonctionnement de ces instruments.

Bibliographie:

- [1] J. OZANAM/ J. E. MONTUCLA: Récréations mathématiques et physiques. Volume III. Septième partie (Gnomonique). Problème XXII. Etant donnés la hauteur du soleil, le jour de l'année, et la hauteur du pôle d'un lieu, trouver l'heure par une construction géométrique. Paris 1778.
- [2] J. PARES. La gnomonique de Desargues à Pardiès. Essai sur l'évolution d'un art scientifique 1640 - 1673. Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences n° 17. Editions Belin. 1988
- [3] F. W. SAWYER: Sciatheric notes - I. Of analemmas, mean time and the analemmatic sundial. North American Sundial Society Press. 1998
- [4] A. ZENNER: Über das Analemma. Deutsche Gesellschaft für Chronometrie. Volume 39. 2000.

Notes:

1) Sur la sphère on distingue les grands cercles, qui sont contenus dans un plan passant par le centre de la sphère, de tous les autres cercles appelés par opposition petits cercles.

2) Dans cet article, le terme analemme sera utilisé pour désigner la technique de résolution géométrique des angles de la sphère utilisant la projection orthogonale sur le méridien. Les ouvrages [2], [3] et [4] de la bibliographie complèteront cette définition qui est ici restrictive.